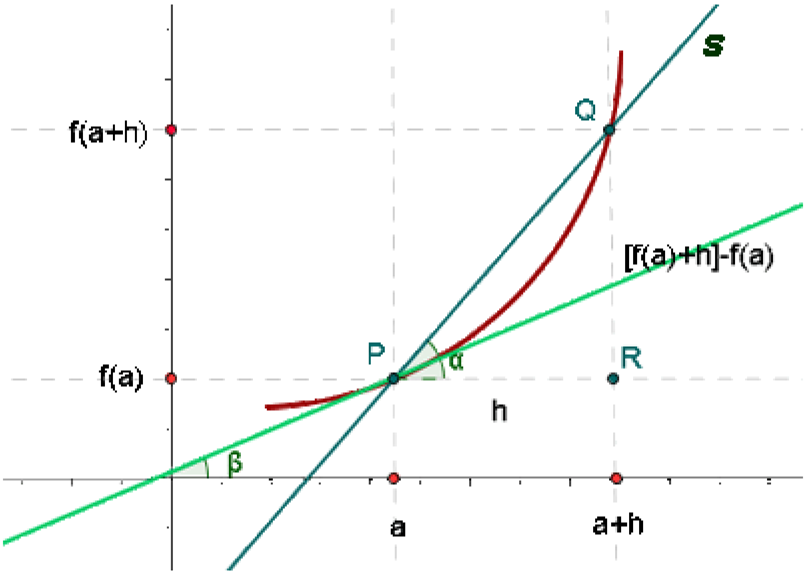
Aplicaciones de la derivada

Ecuación de la recta tangente



La pendiente de la recta tangente a una curva en un punto es la derivada de la función en dicho punto.

$$tg\beta = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{h} = f'(a)$$

La recta tangente a una curva en un punto x=a es aquella que pasa por el punto (a, f(a)) y cuya pendiente es igual a f '(a).

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Ejemplo:

Hallar la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2 - 5x + 6$ paralela a la recta $3x + y - 2 = 0$.

Sea el punto de tangencia (a, f(a))

$m = -3$

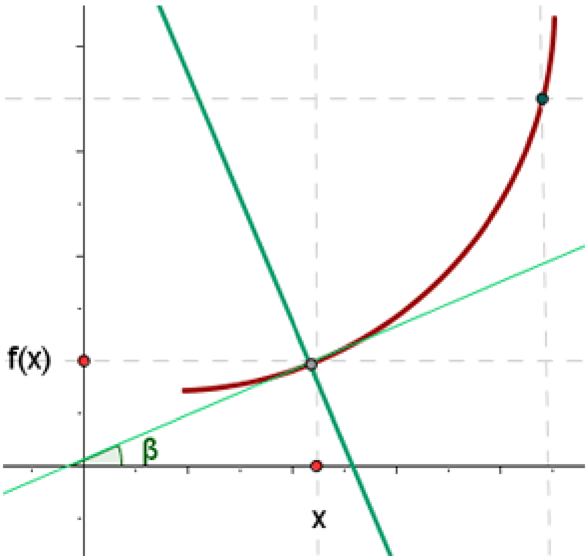
$f'(a) = 2a - 5$

$2a - 5 = -3 a = 1$

P(1, 2)

$y - 2 = -3 (x - 1)$ **$y = -3x + 5$**

Ecuación de la recta normal



La pendiente de la recta normal a una curva en un punto es la opuesta de la inversa de la pendiente de la recta tangente, por ser rectas perpendiculares entre sí.

$$m_n = -\frac{1}{m_t}$$

Es decir, es la opuesta de la inversa de la derivada de la función en dicho punto.

$$m_n = -\frac{1}{f'(a)}$$

La ecuación de la recta normal a una curva en el punto (a, f(a)) será pues:

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$$

Ejemplo:

Hallar la ecuación de la recta tangente y normal a la parábola $y = x^2 + x + 1$ paralela a la bisectriz del primer cuadrante.

Sea el punto de tangencia (a, b)

m = 1

f'(a) = 2a + 12a + 1 = 1 a = 0

Punto de tangencia:(0, 1)

Recta tangente:

y − 1 = x **y = x +1**

Recta normal:

m= 1P(0, 1)

y − 1 = −x **y = −x + 1**

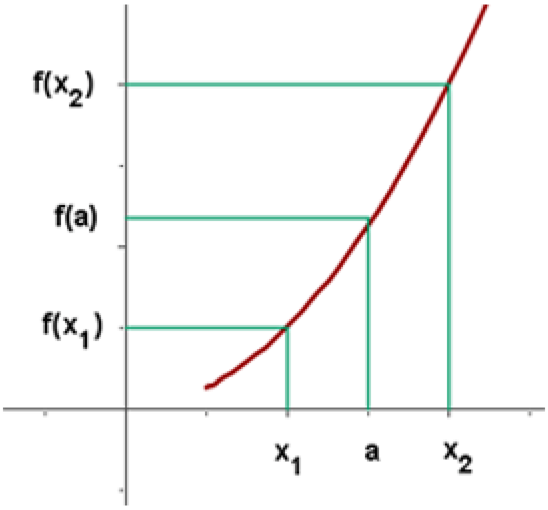
Crecimiento y decrecimiento

Función estrictamente creciente

f es estrictamente creciente en a $\Leftrightarrow \exists\, E(a) / \forall x \in E(a)$:

$$x > a \Rightarrow f(x) > f(a)$$

$$x < a \Rightarrow f(x) < f(a)$$

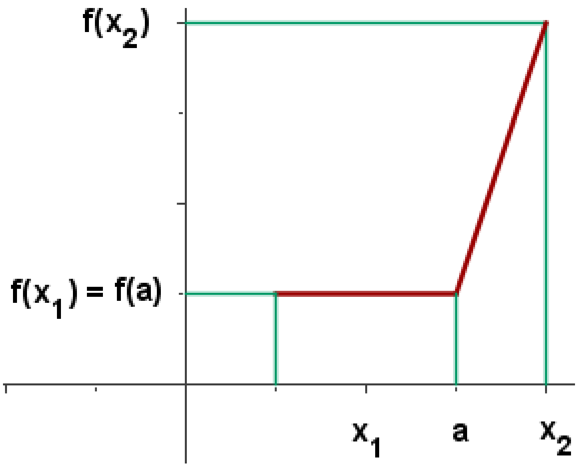


Función creciente

f es creciente en a $\Leftrightarrow \exists\, E(a) / \forall x \in E(a)$:

$$x > a \Rightarrow f(x) \geq f(a)$$

$$x < a \Rightarrow f(x) \leq f(a)$$

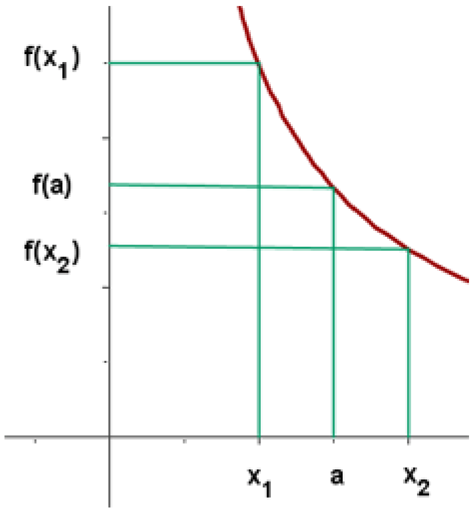


Función estrictamente decreciente

f es estrictamente decreciente en a $\Leftrightarrow \exists\, E(a) / \forall x \in E(a)$:

$$x > a \Rightarrow f(x) < f(a)$$

$$x > a \Rightarrow f(x) < f(a)$$

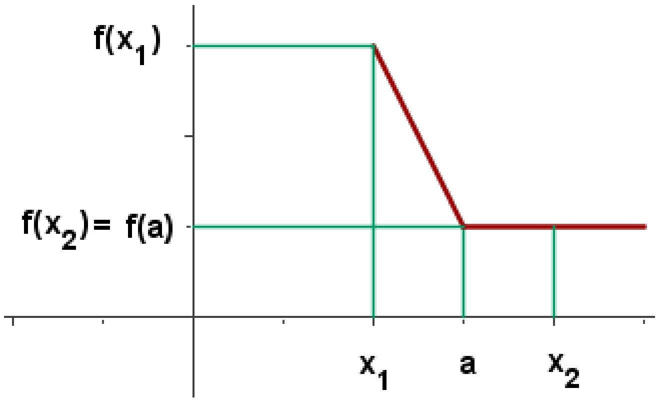


Función decreciente

f es decreciente en a $\Leftrightarrow \exists E(a) / \forall x \in E(a)$:

$$x > a \Rightarrow f(x) \le f(a)$$

$$x > a \Rightarrow f(x) \le f(a)$$



Intervalos de crecimiento y decrecimiento

Crecimiento

Si f es derivable en a:

f es estrictamente creciente en a $\Rightarrow f'(a) > 0$

Decrecimiento

Si f es derivable en a:

f es estrictamente decreciente en a $\Rightarrow f'(a) < 0$

Ejemplo:

Estudiar los i**ntervalos de crecimiento y decrecimiento** de:

$f(x) = x^3 - 3x + 2$

Para hallar su crecimiento y decrecimiento vamos a realizar los siguientes pasos:

1. Derivar la función.

$f'(x) = 3x^2 - 3$

2. Obtener las raíces de la derivada primera, para ello hacemos: f'(x) = 0.

$3x^2 - 3 = 0$ $x = -1$ $x = 1$

3. Formamos intervalos abiertos con los ceros (raíces) de la derivada primera y los puntos de discontinuidad (si los hubiese)

4. Tomamos un valor de cada intervalo, y hallamos el signo que tiene en la derivada primera.

Si f'(x) > 0 es creciente.

Si f'(x) < 0 es decreciente.

Del intervalo $(-\infty, -1)$ tomamos x = -2, por ejemplo.

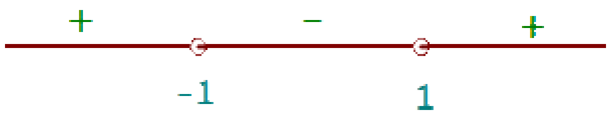
$f'(-2) = 3(-2)^2 - 3 > 0$

Del intervalo $(-1, 1)$ tomamos x = 0, por ejemplo.

$f'(0) = 3(0)^2 - 3 < 0$

Del intervalo $(1, \infty)$ tomamos x = 2, por ejemplo.

$f'(2) = 3(2)^2 - 3 > 0$



5. Escribimos los intervalos de crecimiento y decrecimiento:

De crecimiento: $\mathbf{(-\infty, -1) \cup (1, \infty)}$

De decrecimiento: $\mathbf{(-1,1)}$

Ejemplo:

Estudiar los **intervalos de crecimiento y decrecimiento** de:

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$$

Dominio

$(x-1)^2 = 0 \qquad x = 1 \qquad D = \mathbb{R} - \{1\}$

$$f'(x) = \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3} \qquad\qquad \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3} = 0$$

$x = 0 \qquad x = 3$

x	$(-\infty, 0)$	$(0,1)$	$(1,3)$	$(3,\infty)$
$f'(x)$	+	+	−	+
	↗	↗	↘	↗

Creciente

$(-\infty, 0) \cup (0,1) \cup (3, \infty)$

Decreciente

$(1,3)$

Extremos relativos o locales: máximos y mínimos

Si f es derivable en a, **a es un extremo relativo o local** si:

1. Si f'(a) = 0.

2. Si f''(a) ≠ 0.

Máximos relativos o locales

Si f y f' son derivables en a, **a** es un **máximo relativo o local** si se cumple:

1. f'(a) = 0

2. f''(a) < 0

Mínimos relativos o locales

Si f y f' son derivables en a, **a** es un **mínimo relativo o local** si se cumple:

1. f'(a) = 0

2. f''(a) > 0

Ejemplo:

Estudiar los máximos y mínimos de:

$f(x) = x^3 - 3x + 2$

Para hallar sus extremos locales, seguiremos los siguientes pasos:

1. Hallamos la derivada primera y calculamos sus raíces.

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$

$x = -1$ $x = 1$.

2. Realizamos la 2ª derivada, y calculamos el signo que toman en ella los ceros de derivada primera y si:

f''(x) > 0 Tenemos un mínimo.

f''(x) < 0 Tenemos un máximo.

$f''(x) = 6x$

$f''(-1) = -6$ Máximo

$f''(1) = 6$ Mínimo

3. Calculamos la imagen (en la función) de los extremos relativos.

$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 2 = 4$

$f(1) = (1)^3 - 3(1) + 2 = 0$

Máximo(−1, 4) Mínimo(−1, 0)

Concavidad y convexidad

Si f y f' son derivables en a

$$\begin{cases} f''(a) > 0 \Rightarrow f \text{ es cóncava en } a \\ f''(a) < 0 \Rightarrow f \text{ es convexa en } a \end{cases}$$

Se adopta el criterio de que el valle tiene forma cóncava y la montaña forma convexa.

Ejemplo:

Estudiar los intervalos la concavidad y la convexidad de la función:

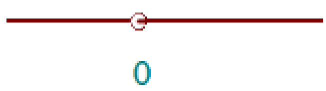
$f(x) = x^3 - 3x + 2$

Para estudiar la concavidad y la convexidad, efectuaremos los siguientes pasos:

1. Hallamos la derivada segunda y calculamos sus raíces.

f"(x) = 6x 6x = 0x = 0.

2. Formamos intervalos abiertos con los ceros (raíces) de la derivada segunda y los puntos de discontinuidad (si los hubiese).



3. Tomamos un valor de cada intervalo, y hallamos el signo que tiene en la derivada segunda.

Si f''(x) > 0 es cóncava.

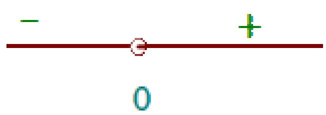
Si f''(x) < 0 es convexa.

Del intervalo (− ∞, 0) tomamos x = −1, por ejemplo.

f"(−1) = 6(−1) < 0 Convexa.

Del intervalo (0, ∞) tomamos x =1, por ejemplo.

f"(1) = 6 (1) > 0 Cóncava.



4. Escribimos los intervalos:

Concavidad: (0, ∞)

Convexidad: (− ∞, 0)

Ejemplo de intervalos de concavidad y convexidad

$$f(x)=\frac{x^3}{(x-1)^2}$$

Dominio

$(x-1)^2=0 \qquad x=1 \qquad D=\mathbb{R}-\{1\}$

$$f'(x)=\frac{x^3-3x^2}{(x-1)^3} \qquad \frac{x^3-3x^2}{(x-1)^3}=0$$

$$f''(x)=\frac{6x}{(x-1)^4} \qquad \frac{6x}{(x-1)^4}=0$$

$x=0$

x	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$	$+$
	$\cap$	$\cup$	$\cup$

Cóncava

$(0,1)\cup(1,\infty)$

Convexa

$(-\infty,0)$

Puntos de inflexión de una función

Son puntos en los que la función cambia de cóncava a convexa o viceversa.

Si f y f' son derivables en a

a es un punto de inflexión $\Rightarrow f''(a)=0$

$f'''(a)\neq 0$

Ejemplo:

Calcular los puntos de inflexión de:

$f(x) = x^3 - 3x + 2$

Para hallar los puntos de inflexión, seguiremos los siguientes pasos:

1. Hallamos la derivada segunda y calculamos sus raíces.

f''(x) = 6x 6x = 0 x = 0.

2. Realizamos la derivada tercera, y calculamos el signo que toman en ella los ceros de derivada segunda y si:

f'''(x) ≠ 0 Tenemos un punto de inflexión.

f'''(x) = 6 Será un punto de inflexión.

3. Calculamos la imagen (en la función) del punto de inflexión.

$f(0) = (0)^3 - 3(0) + 2 = 2$

Punto de inflexión: (0, 2)

Cuadro resumen máximos, mínimos y puntos de inflexión

$f'(a) > 0 : f \text{ creciente en } a$

$f'(a) < 0 : f \text{ decreciente en } a$

$$f'(a) = 0 \begin{cases} f''(a) > 0 : a \text{ mínimo} \\ f''(a) < 0 : a \text{ máximo} \\ f''(a) = 0 \begin{cases} f'''(a) > 0 : f \text{ creciente en } a \\ f'''(a) < 0 : f \text{ creciente en } a \\ f'''(a) = 0 \begin{cases} f^{IV}(a) > 0 : a \text{ mínimo} \\ f^{IV}(a) < 0 : a \text{ máximo} \\ f^{IV}(a) = 0 \ \{ etc\ldots \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

$f''(a) > 0 : f \text{ cóncava en } a$

$f''(a) < 0 : f \text{ convexa en } a$

$$f''(a) = 0 \begin{cases} f'''(a) \neq 0 : a \text{ punto de inflexión} \\ f'''(a) = 0 \quad \begin{cases} f^{IV}(a) > 0 : f \text{ cóncava en } a \\ f^{IV}(a) < 0 : f \text{ convexa en } a \\ f^{IV}(a) = 0 \quad \{ etc\ldots \end{cases} \end{cases}$$

Optimización de funciones

Pasos para la resolución de problemas de optimización

1. Se plantea la función que hay que maximizar o minimizar.

2. Se plantea una ecuación que relacione las distintas variables del problema, en el caso de que haya más de una variable.

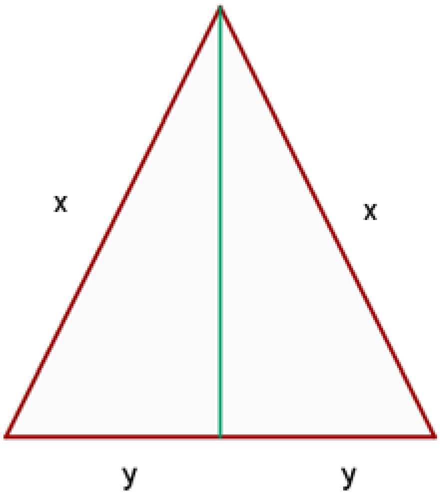
3.Se **despeja** una **variable** de la **ecuación** y se **sustituye** en la **función** de modo que nos quede **una sola variable**.

4. Se deriva la función y se iguala a cero, para hallar los extremos locales.

5. Se realiza la 2ª derivada para comprobar el resultado obtenido.

Ejemplo:

De todos los triángulos isósceles de 12 m de perímetro, hallar los lados del que tome área máxima.



La función que tenemos que maximizar es el área del triángulo:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2y \cdot \sqrt{x^2 - y^2}$$

Relacionamos las variables:

2 x + 2 y = 12

x = 6 − y

Sustituimos en la función:

$$S = y\sqrt{(6-y)^2 - y^2} = y\sqrt{36-12y} = \sqrt{36y^2 - 12y^3}$$

Derivamos, igualamos a cero y calculamos las raíces.

$$S' = \frac{36y - 18y^2}{\sqrt{36y^2 - 12y^3}} \qquad \frac{36y - 18y^2}{\sqrt{36y^2 - 12y^3}} = 0$$

$$36y - 18y^2 = 0 \qquad y_1 = 0; \qquad y_2 = 2$$

Realizamos la 2ª derivada y sustituimos por 2, ya que la solución y = 0 la descartamos porque no hay un triángulo cuyo lado sea cero.

$$S'' = \frac{(36-36y)\cdot\sqrt{36y^2-12y^3} - (36y-18y^2)\cdot\dfrac{72y-36y^2}{2\sqrt{36y^2-12y^3}}}{36y^2-12y^3}$$

$$S''(2) = \frac{(36-36\cdot 2)\cdot\sqrt{36\cdot 2^2-12\cdot 2^3} - (36\cdot 2-18\cdot 2^2)\cdot\dfrac{72\cdot 2-36\cdot 2^2}{2\sqrt{36\cdot 2^2-122^3}}}{36y^2-12y^3}$$

$$S''(2) = \frac{(-)\cdot\sqrt{+}-0\cdot\ldots}{+} = \frac{-}{+} = -$$

Por lo que queda probado que en y = 2 hay un máximo.

La base (2y) mide 4m y los lados oblicuos (x) también miden 4 m, por lo que el triangulo de área máxima sería un triangulo equilatero.